TITLE:

フィードバックをもつガウス型通信路の容量の満たす不等式について (非加法性の数理と情報 : 非加法性と凸解析)

AUTHOR(S):

柳, 研二郎; 山下, 範幸

CITATION:

柳, 研二郎 ...[et al]. フィードバックをもつガウス型通信路の容量の満たす不等式について (非加法性の数理と情報 : 非加法性と凸解析). 数理解析研究所講究録 2009, 1630: 138-147

ISSUE DATE:

2009-02

URL:

http://hdl.handle.net/2433/140378

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第 1630 巻 2009 年 138-147

フィードバックをもつガウス型通信路の容量の満たす不等式について

山口大学大学院・理工学研究科 柳 研二郎 (Kenjiro Yanagi)*
Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University
山口大学大学院・理工学研究科 山下 範幸 (Noriyuki Yamashita)
Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University

Key Words: information theory, capacity, inequality

MSC(2000): 94A40

1 はじめに

フィードバックをもつガウス型通信路の容量について過去何度も報告しているのでその詳細な定義は省略する．もし厳密な定義を必要とする場合は他の報告書を参照していただきたい．フィードバックをもつ有限ブロック長容量は次のように定義される．

$$C_{n,FB,Z}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|R_X^{(n)} + R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{(n)}|},$$

ただし $|\cdot|$ は行列式を表し、最大値は

$$Tr[(I+B)R_X^{(n)}(I+B)^t + BR_Z^{(n)}B^t] \le nP$$

を満たす狭義下三角行列 B と非負対称行列 $R_X^{(n)}$ についてとる．同様にフィードバックがないときには容量 $C_{n,Z}(P)$ は $B=0$ としたときの最大値である．これらの条件の下で Cover and Pombra [6] は次を得た．

Proposition 1 (Cover and Pombra [6]) 任意の $\epsilon > 0$ に対して各 $n = 1, 2, \ldots$ でブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB,Z}(P)-\epsilon)}$ 個の符号語が存在して $n \to \infty$ のとき $Pe^{(n)} \to 0$ とできる．逆に任意の $\epsilon > 0$ とブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB,Z}(P)+\epsilon)}$ 個の符号語からなる任意の符号の列に対しても $Pe^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立たない．これはフィードバックをもたない場合も成り立つ．

*This research was partially supported by the Ministry of Education, Science, Sports and Culture, Grant-in-Aid for Scientific Research (B), 18300003 and (C), 20540175

$C_{n,Z}(P)$ は正確に得られている.

Proposition 2 (Gallager [10])

$$C_{n,Z}(P) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{k}\log\frac{nP + r_1 + \cdots + r_k}{kr_i},$$

ただし $0 < r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$ は $R_Z^{(n)}$ の固有値、$k(\leq n)$ は $nP + r_1 + r_2 + \cdots + r_k > kr_k$ を満たす最大整数である.

ところで $C_{n,FB,Z}(P)$ は正確には得られていないので、今まで多くの人々によって様々な形の上界が得られている ([1],[2],[3],[4], [6],[8],[9],[14], [15],[17],[18],[19]). 以下計算の都合上、対数は自然対数を用いることにする.

2 Question1

Definition 1 任意の $\alpha, \beta \geq 0(\alpha + \beta = 1)$ と任意のガウス雑音 Z_1, Z_2 に対して $R_{\tilde{Z}} = \alpha R_{Z_1} + \beta R_{Z_2}$ とおく. このときガウス雑音 $\tilde{Z}$ をもつ通信路を混合型ガウス型通信路という.

Question 1

$$C_{n,FB,\tilde{Z}}(P) \leq \alpha C_{n,FB,Z_1}(P) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P)?$$

今までは次の結果が得られている.

Theorem 1 (Yanagi-Chen-Yu [19])

$$C_{n,\tilde{Z}}(P) \leq \alpha C_{n,Z_1}(P) + \beta C_{n,Z_2}(P).$$

Theorem 2 (Yanagi-Chen-Yu [19]) $P = \alpha P_1 + \beta P_2$ を満たす $P_1, P_2 \geq 0$ が存在して

$$C_{n,FB,\tilde{Z}}(P) \leq \alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2).$$

が成り立つ.

Theorem 3 (Yanagi-Chen-Yu [19]) 次の (a) 又は (b) の条件があれば *Question 2* が成り立つ.

(a) R_{Z_1} の n 行 n 列を除いた部分行列と R_{Z_2} のそれが一致する.

(b) $\tilde{Z}$ がホワイト型である. 即ち $R_{\tilde{Z}}$ が対角行列である.

3 Kim の結果

Definition 2 $Z = \{Z_i; i = 1, 2, \ldots\}$ が *first order moving average Gaussian channel* であるとは次のような3つの同値な条件をみたすことである.

(1) $Z_i = \alpha U_{i-1} + U_i$, $i = 1, 2, \ldots$, ただし $U_i \sim N(0,1)$ は *i.i.d.* とする.

(2) *Spectral density function (SDF)* $f(\lambda)$ は次で与えられる.

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|1 + \alpha e^{-i\lambda}|^2 = \frac{1}{2\pi}(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos\lambda).$$

(3) $Z_n = (Z_i, \ldots, Z_n) \sim N_n(0, K_Z)$, $n \in \mathbb{N}$, ただし *covariance matrix* K_Z は次で与えられる.

$$K_Z = \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1+\alpha^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

このとき Z の entropy rate は次のように計算される.

$$\begin{aligned} h(Z) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\{4\pi^2 e f(\lambda)\} d\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\{2\pi e|1 + \alpha e^{-i\lambda}|^2\} d\lambda \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi e) \quad \text{if} \quad |\alpha| \le 1 \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi e\alpha^2) \quad \text{if} \quad |\alpha| > 1. \end{aligned}$$

ここで最後の計算は次の Poisson's integral formula を用いている.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|e^{i\lambda} - \alpha| d\lambda &= 0 \quad \text{if} \quad |\alpha| \le 1, \\ &= \log|\alpha| \quad \text{if} \quad |\alpha| > 1. \end{aligned}$$

$MA(1)$ Gaussian noise をもつ Gaussian channel の capacity は次で与えられている.

$$C_{FB,Z}(P) = \lim_{n\to\infty} C_{n,FB,Z}(P).$$

最近 Kim は初めて feedback をもつ Gaussian channel の capacity を求めた.

Theorem 4 (Kim [12])

$$C_{FB,Z}(P) = -\log x_0,$$

ただし x_0 は次の4次方程式の正の唯一解である;

$$Px^2 = (1 - x^2)(1 - |\alpha|x)^2.$$

4 Question 1 に関連する不等式

$Z \sim \mathrm{MA}(1,p)$, $Z_i = U_i + pU_{i-1}$, $0 < p \le 1$ かつ $W \sim \mathrm{MA}(1,q)$, $W_i = U_i + qU_{i-1}$, $0 < q \le 1$ とする．このとき

$$R_{\alpha Z+\beta W} \le \alpha R_Z + \beta R_W \le R_{\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}$$

が成り立つ．なぜなら

$$\alpha R_Z + \beta R_W = R_{\alpha Z+\beta W} + \alpha\beta R_{Z-W}$$

より

$$R_{\alpha Z+\beta W} \le \alpha R_Z + \beta R_W.$$

また

$$\alpha R_Z + \beta R_W + \sqrt{\alpha\beta}(R_{ZW} + R_{WZ}) = R_{\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}$$

が成り立つ．一方 $R_{ZW} + R_{WZ}$ は次のような行列になる．

$$\begin{pmatrix} 2+2pq & p+q & 0 & \cdots & 0 \\ p+q & 2+2pq & p+q & \cdots & 0 \\ 0 & p+q & 2+2pq & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & p+q \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2+2pq \end{pmatrix}.$$

この行列の固有値 r_i は次のように表される．

$$\begin{aligned} r_i &= 2+2pq-2(p+q)\cos\frac{i\pi}{n+1} \quad (i=1,2,\ldots,n) \\ &\ge 2+2pq-2(p+q) \\ &= 2(1-p)(1-q) \ge 0. \end{aligned}$$

したがって $R_{ZW} + R_{WZ} \ge 0$ となり

$$\alpha R_Z + \beta R_W \le R_{\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}$$

である．したがって次のことがわかる．

Proposition 3 $R_{\tilde{Z}} = \alpha R_Z + \beta R_W$ とする．このとき次が成り立つ．

$$C_{FB,\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}(P) \le C_{FB,\tilde{Z}}(P) \le C_{FB,\alpha Z+\beta W}(P).$$

$V = \sqrt{\alpha}Z + \sqrt{\beta}W$ とすると

$$V_i = (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})U_i + (\sqrt{\alpha}p + \sqrt{\beta}q)U_{i-1}.$$

ここで

$$Y_i = U_i + \frac{\sqrt{\alpha}p+\sqrt{\beta}q}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}U_{i-1}$$

とおくと

$$Y = \frac{\sqrt{\alpha}Z + \sqrt{\beta}W}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \sim \mathrm{MA}(1, \frac{\sqrt{\alpha}p + \sqrt{\beta}q}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}})$$

である．このとき

$$\begin{aligned}
& C_{n,FB,V}(P) \\
= \ & \max\{\frac{1}{2n}\log\frac{|R_{S+V}|}{|R_V|}; Tr[R_S] \leq nP\} \\
= \ & \max\{\frac{1}{2n}\log\frac{|R_{S+(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})Y}|}{|R_{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})Y}|}; Tr[R_S] \leq nP\} \\
= \ & \max\{\frac{1}{2n}\log\frac{|R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}+Y}|}{|R_Y|}; Tr[R_{\frac{S}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}}] \leq \frac{nP}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}\} \\
= \ & C_{n,FB,Y}(\frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}).
\end{aligned}$$

よって

$$C_{FB,V}(P) = C_{FB,Y}(\frac{P}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}).$$

次に

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-t^2}}$$

とおく．$f(a) = 1, f(b) = 0$ となる $0 < a < b < 1$ が unique にとれる．また $f(t)$ は $0 < t < 1$ で減少関数である．このとき Question 2 より弱い不等式が成り立つことが予想される．

Question 2

$$C_{FB,\sqrt{\alpha}Z+\sqrt{\beta}W}(P) \leq \alpha C_{FB,Z}(P) + \beta C_{FB,W}(P)?$$

これを示すには次の不等式を証明すればよい．

Question 3 任意の $a \leq x, y \leq b$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-x^2}}) + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}(\frac{1}{y} - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-y^2}}) \\
& \leq \frac{1}{x^\alpha y^\beta} - \frac{\sqrt{P}}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\sqrt{1-(x^\alpha y^\beta)^2}}?
\end{aligned}$$

$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ の場合を考える．

Question 4 任意の $a \leq x, y \leq b$ に対して次が成り立つ．

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-x^2}}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{y} - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-y^2}}) \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} - \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{2(1-xy)}}?$$

このグラフにより Question 4 は成り立つことがわかる．この論文では肯定的に成り立つことを証明する．

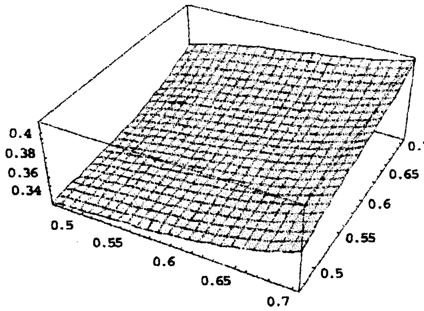

図 1: Question 4 のグラフ ($P=1, \alpha=\beta=1/2$)

5 Theorem 5 の証明

Theorem 5 任意の $a \leq x, y \leq b$ に対して次が成り立つ.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-y^2}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{2(1-xy)}}.$$

Proof of Theorem 5.

$$g(t,P)=t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right), \quad \frac{1}{b} \leq t \leq \frac{1}{a}$$

とおく. ただし $P>0$ に対して a, b は

$$\frac{1}{a}-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-a^2}}=1, \quad \frac{1}{b}-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-b^2}}=0 \tag{1}$$

を満たすものとする. このとき $0<a<b<1$ が成り立つことがわかる. ここで $L=\sqrt{(1-a)^2(1-a^2)+a^2}$ とおくと

$$b=\frac{a}{L}, \quad P=\frac{L^2}{a^2}-1$$

と a のみの関数として表現できる. 次の Lemma が成り立つ.

Lemma 1 任意の $P>0$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-a^2}} \geq \frac{1}{2-\sqrt{2}} \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}.$$

Proof of Lemma 1 $2(2-\sqrt{2})>1$ かつ $L>a$ より

$$2(2-\sqrt{2})\left(\frac{1}{a}-1\right)>\frac{1}{a}-1>\frac{1}{\sqrt{a}}-1>\frac{1}{\sqrt{L}}-1$$

が成り立つ. また $L<1$ より次の不等式が成り立つ.

$$\frac{1-a}{a} > \frac{1}{2(2-\sqrt{2})}\left(\frac{1}{\sqrt{L}}-1\right) = \frac{1}{2-\sqrt{2}}\frac{1-\sqrt{L}}{2\sqrt{L}} > \frac{1}{2-\sqrt{2}}\frac{1-\sqrt{L}}{1+\sqrt{L}}.$$

ここで (1) より

$$\frac{1-a}{a} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-a^2}}.$$

また $L=a/b$ より目標の不等式を得る. q.e.d.

Lemma 2 $1/b \le t \le s \le 1/a$ を満たす任意の t,s に対して次の不等式が成り立つ.

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \ge \frac{\sqrt{s}-\sqrt{t}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}.$$

Proof of Lemma 2 次の関係に注意する.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \min_{1/b\le t\le s\le 1/a} \sqrt{\frac{t}{s}}.$$

したがって次の不等式を得る.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} &= 2\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a/b}+1}-\frac{1}{2}\right)\\ &\ge 2\left(\frac{1}{\sqrt{t/s}+1}-\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{s}-\sqrt{t}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

q.e.d.

このとき Theorem 5 に相当する次の Theorem を得る.

Theorem 6 $P>0$ とする. 任意の t,s $(1/b \le t \le s \le 1/a)$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\frac{1}{2}g(t,P)+\frac{1}{2}g(s,P) \le g(\sqrt{ts},\frac{P}{2}).$$

Proof of Theorem 6 $g(t,P)$ は t について concave function であるので

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}g(t,\frac{P}{2})+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}g(s,\frac{P}{2}) \le g(\sqrt{ts},\frac{P}{2})$$

が成り立つ. したがって

$$\frac{1}{2}g(t,P)+\frac{1}{2}g(s,P) \le \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}g(t,\frac{P}{2})+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}g(s,\frac{P}{2})$$

を示せばよい. Lemma 1 と Lemma 2 より

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-a^2}} \geq \frac{1}{2-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{s}-\sqrt{t}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right).$$

ここで $1/b \leq t \leq s \leq 1/a$ を満たす任意の t, s に対して

$$0 \leq s\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}\right) - t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right) \leq 1$$

が成り立つので次を得る.

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-a^2}} \geq \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}-\frac{1}{2} \geq$$

$$\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right)\left\{s\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}\right)-t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right)\right\}.$$

さらに

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-\frac{1}{s^2}}} \geq \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-a^2}}$$

が成り立つので次を得る.

$$\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right)\left\{t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right)-s\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}\right)\right\}$$

$$+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left\{\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{1-\frac{1}{s^2}}}\right\} \geq 0.$$

したがって

$$\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right)t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}\frac{\sqrt{P}t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}\right)s\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}\frac{\sqrt{P}s}{\sqrt{s^2-1}} \geq 0.$$

よって

$$\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}-\frac{1}{2}\right)t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}\frac{\sqrt{P}t}{\sqrt{t^2-1}}$$

$$+\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}-\frac{1}{2}\right)s\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}\frac{\sqrt{P}s}{\sqrt{s^2-1}} \geq 0.$$

さらに

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}\left\{t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{P}t}{\sqrt{t^2-1}}\right\}$$

$$+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}\left\{s\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{P}s}{\sqrt{s^2-1}}\right\}$$

$$\geq \frac{1}{2}t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right)+\frac{1}{2}s\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}\right).$$

したがって

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}t\left(1-\frac{\sqrt{P/2}}{\sqrt{t^2-1}}\right)+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}s\left(1-\frac{\sqrt{P/2}}{\sqrt{s^2-1}}\right)$$
$$\geq \frac{1}{2}t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right)+\frac{1}{2}s\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}\right).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g(t,P)+\frac{1}{2}g(s,P)\\
=\ &\frac{1}{2}t\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{t^2-1}}\right)+\frac{1}{2}s\left(1-\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{s^2-1}}\right)\\
\leq\ &\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}t\left(1-\frac{\sqrt{P/2}}{\sqrt{t^2-1}}\right)+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}s\left(1-\frac{\sqrt{P/2}}{\sqrt{s^2-1}}\right)\\
=\ &\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}g(t,\frac{P}{2})+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}g(s,\frac{P}{2}).
\end{aligned}$$

q.e.d.

参考文献

[1] H.W.Chen and K.Yanagi, On the Cover's conjecture on capacity of Gaussian channel with feedback, IEICE Trans. Fundamentals, vol E80-A, no 11, pp 2272-2275, November 1997.

[2] H.W.Chen and K.Yanagi, Refinements of the half-bit and factor-of-two bounds for capacity in Gaussian channels with feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-45, no 1, pp 319-325, January 1999.

[3] H.W.Chen and K.Yanagi, Upper bounds on the capacity of discrete time blockwise white Gaussian channels with feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-46, no 3, pp 1125-1131, May 2000.

[4] H.W.Chen and K.Yanagi, The convex-concave characteristics of Gaussian channel capacity functions, IEEE Trans. Information Theory, vol 52, no 6, pp 2167-2172, 2006.

[5] T.M.Cover, Conjecture: Feedback does not help much, in Open problems in communication and computation, T.Cover and B.Gopinath (Ed.), pp 70-71, Springer-Verlag, New York, 1987.

[6] T.M.Cover and S.Pombra, Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, no 1, pp 37-43, January 1989.

[7] T.M.Cover and J.A.Thomas, Elements of Information Theory, New York, Wiley, 1991.

[8] A.Dembo, On Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-35, no 5, pp 1072-1089, September 1989.

[9] P.Ebert, The capacity of the Gaussian channel with feedback, Bell. Syst. Tech. J., vol 49, pp 1705-1712, 1970.

[10] R.G.Gallager, Information Theory and Reliable Communication, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[11] S.Ihara and K.Yanagi, Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, II, Japan J. Appl. Math., vol 6, pp 245-258, 1989.

[12] Y.H.Kim, Feedback capacity of the first-order moving average Gaussian channel, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-52, no 7, pp 3063-3079, 2006.

[13] Y.H.Kim, A counterexample to Cover's $2P$ conjecture on Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-52, no 8, pp 3792-3793, 2006.

[14] M.Pinsker, talk delivered at the Soviet Information Theory Meeting, (no abstract published), 1969.

[15] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, Lecture Notes in Math., vol 1299, pp 565-570, 1988.

[16] K.Yanagi, Necessary and sufficient condition for capacity of the discrete time Gaussian channel to be increased by feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-38, no 6, pp 1788-1791, November 1992.

[17] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, II, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-40, no 2, pp 588-593, March 1994.

[18] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, III, Bull. Kyushu Inst. Tech., Pure and Applied Mathematics, vol 45, pp 1-8, 1998.

[19] K.Yanagi, H.W.Chen and J.W.Yu, Operator inequality and its application to capacity of Gaussian channel, Taiwanese J. Math., vol 4, no 3, pp 407-416, 2000.

[20] K.Yanagi, J.W.Yu and I.F.Chao, On some inequalities for capacity in mixed Gaussian channels with feedback, Arch. Inequalities Appl., vol 2, pp 13-24, 2004.